

*Tres ejemplos introductorios de
aplicaciones de la matemática
en la economía*

JORGE LUDLOW WIECHERS*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años diversas ramas de las matemáticas han irrumpido en varios campos de las ciencias sociales.

La economía matemática no sólo hace abundante uso del cálculo diferencial e integral (como en el pasado), sino también agrega instrumentos matemáticos más sofisticados como la topología algebraica, la topología diferencial, la geometría fractal y el análisis de sistemas dinámicos.

La teoría de las elecciones racionales (*rational choices*), con fundamento matemático en la teoría de los juegos, se ha constituido, hoy por hoy, en una parte importante de una corriente de pensamiento de la ciencia política.

A pesar del avance en el uso de las matemáticas, ya sea desde el punto de vista aplicado (cerca de la econometría y a la estadística) o como instrumento de apoyo a la razón, aún quedan amplios campos teóricos de estas disciplinas sociales donde no ha penetrado. En México y en el resto de América Latina, se usa más bien la economía y la ciencia política discursivas, aunque hay claros indicios de tendencias cuantitativas.

La sociología merece una consideración aparte. A pesar de la pretensión de James Coleman cristalizada en su libro *Mathematical Sociology* no se ha perfilado aún con claridad una sociología matemática. Tal vez, lo más cercano a ello

* Profesor-investigador de la UAM-Azcapotzalco.

sea la vasta labor que desarrolló en Francia Raymond Boudon, pero ésta se encuentra desperdigada en libros y artículos escritos durante más de un cuarto de siglo.

Desde fines de la década de los sesenta, los sociólogos latinoamericanos discuten ásperamente sobre métodos cualitativos *versus* métodos cuantitativos. Los primeros engloban al conjunto de técnicas de observación y análisis de datos que tienen su origen en la antropología (observación directa, observación participante, construcción de tipologías); en tanto que por los segundos se entiende, habitualmente, las técnicas de encuestas y el análisis estadístico asociado a ellas.

Si bien en un comienzo la discusión se planteó como una abierta oposición, a comienzos de la década de los noventa pareciera darse en términos de complementación, o bien, de aplicación selectiva de uno y otro métodos según la naturaleza del problema a investigarse.

En México suele discutirse si es o no pertinente aplicar matemáticas a los problemas sociales. Sin el ánimo de entrar de lleno a este tema y menos aún de hacerlo en abstracto decidimos mostrar la utilidad de las matemáticas en el tratamiento de algunos problemas concretos. Seleccionamos tres, uno tomado de la historia económica y dos de la economía.

HISTORIA ECONÓMICA, LA PRODUCCIÓN EN EL PERIODO 1911-1920

Plantearse el problema de conocer los datos de la producción nacional en el periodo de la Revolución, requiere la elaboración de una estimación, para esto se utilizará la regresión simple. Formularemos un escenario hipotético y lo usaremos para dar una explicación de la evolución de la producción nacional en los años de la Revolución Mexicana (1911-1920). De acuerdo con los datos del Banco de México,

este periodo no fue capturado y con los datos existentes se tratarán de estimar los correspondientes a esta época de cambio. El interés es contrastar la evolución de la producción nacional con las etapas de la Revolución.

Lo anterior se realizará en dos etapas: en la primera no supondremos ningún marco explicativo de fundamento, y aplicaremos exclusivamente la regresión simple; en la segunda, usaremos el enfoque *absorción* de la teoría económica para hacerlo trabajar en la historia. El lector notará que no se intenta presentar una concepción acabada sino que se invita a los historiadores a que sean ellos los que lleven la batuta en el uso de estas técnicas ampliamente conocidas, ya que faltan estudios de apreciación sobre periodos importantes de nuestra historia. Un historiador conoce las haciendas y los centros productivos de la época como para determinar los lugares donde esta producción pudo haber tenido lugar, y conociendo la distribución de los grupos armados se puede tener una apreciación de la dinámica revolucionaria.

El Banco de México tiene en su publicación *Indicadores económicos*, una serie de la producción nacional para los años 1895 a 1910, este orden se trunca y prosigue desde 1921 a la fecha,¹ las cifras que ahí aparecen son el ingrediente básico para generar los datos que faltan 1911-1920.

La regresión, instrumento útil en las ciencias sociales, permite llegar a una fórmula en la que por simple sustitución de valores nos ayuda a realizar la estimación buscada. Así, se propone la relación más simple posible: una línea recta con parámetros b y m , los cuales dependen de la muestra de datos observados:

$$\text{Producción} = b + m \cdot \text{año}$$

Esta ecuación, toda vez que se proponga una fecha, nos da una estimación de la producción para cada año y su grá-

¹ Véase el cuadro II-H-1 de "Indicadores de la actividad industrial", en *Indicadores Económicos*, Banco de México. En él se incluye un anexo con los datos de la producción.

fica es una recta. En esta estimación, los turbulentos años de la Revolución son tratados todos por igual.

El primer punto importante es: ¿cuáles datos harán el papel de la muestra? Ya que el tamaño y los datos de la muestra afectan los valores estimados de b y m , en principio hay varias opciones.

Caso 1. Interpolación (en la gráfica el proceso se denota como var1). Si se toma como muestra: datos antes y después del periodo buscado, estaremos usando la regresión para elaborar una interpolación lineal de datos. Por otra parte: ¿qué fechas se toman para hacer los cortes?, ya que, si entran los años desde 1895 hasta 1980, estaríamos dejando ir las cifras de la producción del periodo porfirista y datos de la producción de los últimos periodos presidenciales, lo cual no es correcto. En todo caso, los datos de 1895 a 1910 y de 1921 a 1928 son los que se deben utilizar para hacer la interpolación de 1911 a 1921. La idea es que el punto de corte de acuerdo con la historia es también el que permite reproducir mejor los datos faltantes, porque al interior del periodo está toda la información relevante y fuera de él es ya otra dinámica histórica. Aquí se interpolará con los datos del final del periodo porfirista como antecedente inmediato y con los de los periodos presidenciales de Álvaro Obregón (1920-1924) y Plutarco Elías Calles (1924-1928) como sus consecuencias inmediatas, el lector observará que aunque están los años de Calles como presidente no se incluye el llamado periodo callista:

Plutarco Elías Calles	1924 - 1928
Emilio Portes Gil	1928 - 1930
Pascual Ortiz Rubio	1930 - 1932
Abelardo L. Rodríguez	1932 - 1934

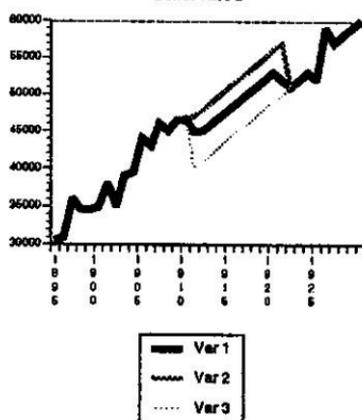
Caso 2. Proyectar hacia adelante (la variable será denotada por var2). Se adopta el mismo punto de vista que utiliza la econometría, esto es, con base en el pasado se puede es-

timar el futuro inmediato, ya que con las observaciones factibles se puede elaborar un escenario futuro, para esto se toman sólo los datos disponibles de 1895 a 1910 y se extrapola para 1911-1920. En este caso, se proyectan hacia el futuro los antecedentes de la Revolución.

Caso 3. Proyectar hacia atrás (la variable será denotada por var3). Afirmar que un acontecimiento va ligado a su pasado inmediato pero no a su pasado remoto; por esto, se deben tomar sólo los datos inmediatos posteriores. Con los datos de 1921 a 1928 se proyecta hacia atrás. Así, podremos esperar obtener afinidad entre los datos de la producción mexicana del periodo de la Revolución, y los de la producción correspondiente a las presidencias del general Álvaro Obregón y Plutarco Elías Calles, ya que esta etapa es la que refleja las consecuencias inmediatas del periodo 1910-1920. En este caso, dadas las consecuencias, se busca mirar en los orígenes.

A continuación presentaremos los resultados de cada caso para que el lector evalúe qué ruta es la que mejor refleja tan importante periodo mexicano.

GRÁFICA 1



En los tres casos (var1, var2, var3) se obtiene una evolución lineal de la producción y no se incorpora el efecto sobre la misma de las diferentes etapas de la Revolución al interior del periodo, ya que el modelo propuesto es una línea recta.

Se puede buscar mejorar la aproximación al proponer la estimación de relaciones funcionales sofisticadas, sin embargo, el objetivo es mostrar que con métodos muy simples es posible lograr información útil sobre el periodo de la Revolución.

Para introducir en el discurso la evolución de las exportaciones y las importaciones en el periodo de análisis, tomaremos prestada una relación de la teoría económica, la cual ha sido utilizada para explicar la balanza comercial de un país. El déficit o superávit de la balanza de una economía se mide por la diferencia de las exportaciones menos sus importaciones.

Se entiende por absorción la cantidad de bienes y servicios de producción, interna o externa, que la economía toma para continuar operando; así, un déficit se origina porque la economía vive más allá de lo que es capaz de producir. La absorción y la balanza quedan enlazadas por la conocida relación de S.S. Alexander:

$$\begin{aligned} \text{balanza} &= \text{exportaciones} - \text{importaciones} \\ &= \text{producción} - \text{absorción}. \end{aligned}$$

Cuando no hay déficit o superávit la balanza es igual a cero y, por lo tanto, las exportaciones son iguales a las importaciones, y también la producción es igual a lo que la economía requiere para continuar operando, o sea, igual a la absorción. La relación del concepto de la absorción y la demanda agregada es directa ya que a las componentes se les agrupa como sigue:

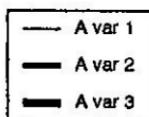
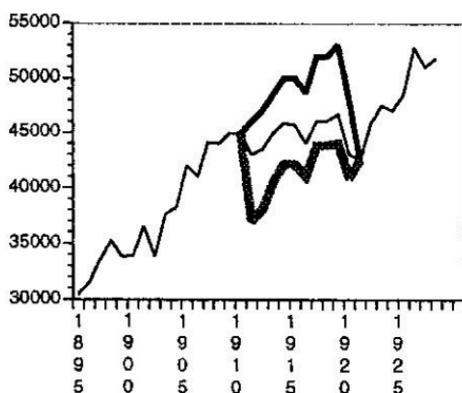
absorción = consumo + inversión + gasto de gobierno,
la forma en que se va a usar esta identidad es:

absorción = producción - exportaciones + importaciones.

La idea es observar la evolución de la absorción en el periodo 1911-1920.

Se aplica aquí un concepto de la teoría económica a la historia porque, en la historia de México, las relaciones de nuestro país con el mundo han tenido un papel relevante. En el periodo porfirista la inversión extranjera era tan fuerte que desplazaba a los intereses nacionales, recordaremos que Francisco I. Madero provenía de una acaudalada familia coahuilense y que los movimientos de Villa y Zapata eran genuinamente populares. Durante la Revolución las relaciones comerciales fueron principalmente con Estados Unidos. Vale la pena notar que en el periodo 1910-1920, las exportaciones superaron a las importaciones haciendo que la balanza comercial fuera siempre positiva.

GRÁFICA 2



Se realizan tres estimaciones del modelo: producción = $b + m \cdot \text{año}$, para así generar los datos faltantes vía interpolar, proyectar hacia adelante, proyectar hacia atrás; y se generan tres series nuevas denominadas var1, var2, y var3 a su vez al aplicar la idea de la absorción se llega a tres series llamadas avar1, avar2, avar3, respectivamente. Note que var1, var2, var3 son estimaciones lineales de la producción mientras que avar1, avar2, avar3, son estimaciones de la absorción, se omiten los aspectos técnicos de la estimación por ser triviales. Véase la gráfica 2 con los resultados finales.

La sugerencia que se obtiene de mirar las gráficas es que el método de interpolar, es el que parece producir el escenario más factible.

Pondremos los datos del cambio porcentual, para el caso en el periodo estimado se tienen las cifras:

Periodo	Cambio porcentual
1910 - 1911	- 4.46
1911 - 1912	1.34
1912 - 1913	3.24
1913 - 1914	2.94
1914 - 1915	- 0.87
1915 - 1916	- 3.11
1916 - 1917	5.01
1917 - 1918	- 0.05
1918 - 1919	- 0.89
1919 - 1920	- 8.89
1920 - 1921	0.21

Cuando la cifra es menor que cero se trata de un retroceso económico, así, la producción en 1910 en la cual el PIB = 249 849.3 (a millones de pesos de 1980), y usando la tabla, se puede ver la estimación que se logra a partir de la interpolación y de la relación de absorción.

De acuerdo con la gráfica se puede sugerir lo siguiente: con el advenimiento de la Revolución la economía entró en

una recesión entre 1910 y 1911, después la producción parecía recuperar su tendencia histórica al crecimiento, sin embargo, 1915 y 1916 fueron también años de recesión, lo cual no es extraño porque en este periodo los carrancistas combatieron a villistas y zapatistas. Durante 1917, cuando surge nuestra actual Constitución, el país atravesaba por una etapa de calma y crecimiento, a pesar de esto don Venustiano Carranza enfrentó un estancamiento económico de 1918 a 1919, y 1920 fue un año de crisis, es cuando se da la primera transición de poderes presidenciales. A partir de 1921 ya se tienen publicados los datos y, por medio de ellos, se aprecia el avance del país durante los mandatos del general Álvaro Obregón (1920-1924) y de Plutarco Elías Calles (1924-1928).

Este simple análisis gráfico nos invita a la pregunta: ¿hasta dónde la evidencia empírica permite concluir que se da el desarrollo económico con base en la existencia de un gobierno que guíe?

EL USO DE LAS TÉCNICAS ECONOMETRICAS APLICADAS A LA BALANZA COMERCIAL DE MÉXICO

En la presente sección se muestra cómo se utiliza la técnica econométrica para obtener ideas acerca del funcionamiento de la economía mexicana, nos concentraremos en la balanza comercial y aplicaremos el enfoque elasticidades, el cual nos dice que para eliminar un déficit en nuestro comercio con el mundo, se tiene que aplicar una devaluación de nuestra moneda.

Primero aplicaremos la prueba de causalidad de Granger, en segundo lugar presentaremos un análisis estructural, como se usa decir en la nomenclatura econométrica y, por último, aplicaremos la prueba de cambio estructural de Gregory Chow.

Se toman datos agregados anuales de 1950 a 1985 del Banco de México (Indicadores de comercio exterior, expor-

taciones e importaciones totales) y del FMI para obtener el PNB de Estados Unidos.

En el enfoque elasticidades, la noción intuitiva es que una devaluación reduce las importaciones y amplía las exportaciones. Éste es el criterio dominante ya que es parte de la teoría neoclásica y la idea de ajuste proviene de una relación de exceso de demanda e impone una desigualdad para que se tenga estabilidad en el ajuste. Se basa en el resultado de Marshall-Lerner (Ingram, J. C. 1986), el cual nos garantiza que, partiendo de una posición de equilibrio en la balanza comercial, un déficit es corregido mediante una devaluación de la moneda doméstica frente al dinero mundial.

De tal modo es la condición que nos dice: si devaluamos nuestra moneda y las elasticidades tipo de cambio de las exportaciones y de las importaciones son tales que amplían el margen entre ellas como para que el déficit se cierre y se retorne al equilibrio, siempre que las elasticidades sean tales que su suma en valor absoluto sea mayor a la unidad (Ott, y Yoo 1975, Dornbusch 1980). Sin embargo, en un estudio clásico realizado por Houthakker, H. S. y Magee, S. P. en 1969, con datos de 15 países desarrollados, hallan que no siempre se cumple esta condición. Para siete países solamente: Canadá, Dinamarca, Francia, Japón, Sudáfrica, Suiza y Estados Unidos, se cumple la condición de Marshall-Lerner mientras que para Australia, Alemania, Bélgica, Luxemburgo, Italia, Holanda, Noruega, Suecia e Inglaterra no se satisface.

La idea de esta sección es hacer un estudio para el caso de México que, curiosamente, aún falta.

Para que exista el mecanismo de ajuste Marshall-Lerner tiene que existir causalidad entre las variables, por lo tanto, es prudente primero aplicar una prueba de causalidad ya sea de Sims o de Granger (Ize y Vera 1981) y esto es lo que vamos a hacer.

Cotejaremos la validez de las ideas anteriores a través de una prueba de causalidad de Granger (Granger, C. W.

J. y Newbold, P. 1977), la cual consiste en proponer un modelo irrestricto de corte autorregresivo:

$$y_t = \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \dots + \alpha_q \cdot y_{t-q} + \beta_1 \cdot x_{t-1} + \dots + \beta_p \cdot x_{t-p}$$

Lo que se cuestiona es: ¿el pasado de X causa a la variable Y?, si es así, su contribución dentro del modelo debe ser significativa, en otras palabras si el pasado de X no causa a Y, su contribución explicativa dentro del modelo es negligible y, por tanto, al aplicar una prueba de significación para X es de esperar que tenga un estadístico de prueba que esté dentro de la región de rechazo de la hipótesis nula:

$$\beta_1 = \dots = \beta_p = 0,$$

en cuyo caso, el modelo restringido:

$$y_t = \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \dots + \alpha_q \cdot y_{t-q},$$

es el que más explica, ya que incluye sólo al pasado de Y. La hipótesis alternativa es que al menos un β_1 es no nulo. Así, sus correspondientes niveles x_{t-1} causan a Y. El estadístico de prueba es:

$$F^* = \frac{\left(\sum e_{ir}^2 - \sum e_{ii}^2 \right) / p}{\sum e_{ii}^2 / (T - (p + q))}$$

en donde:

T es el número total de observaciones.

p es el número de parámetros para X.

$p + q$ es el número total de parámetros.

$\sum e_{ir}^2$: r es porque se trata de la suma de los cuadrados de los residuos bajo la idea de que $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

$\sum e_{ii}^2$: i ya que es la suma de los cuadrados de los residuos del modelo irrestricto (el original).

Las sumas se hacen sobre todas las observaciones de 1 a T .

Se sabe que F^* tiene una distribución de $F(p, T - (p + q))$ bajo la hipótesis nula, por lo tanto, la regla que marca el curso de acción a seguir es:

Si $F^* > F_\alpha(p, T - (p + q))$, se acepta la idea de causalidad de X hacia Y (o sea, se rechaza la hipótesis nula).

Si $F^* \leq F_\alpha(p, T - (p + q))$, no hay evidencia empírica como para aceptar la noción de causalidad, o sea, se toma la hipótesis nula, así se considera que el modelo correcto no incluye a X, esto es:

$$y_t = \alpha_1 \cdot y_{t-1} + \dots + \alpha_q \cdot y_{t-q}$$

ya que: $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

Es importante notar que la prueba de Granger no presupone una especificación del modelo, sólo habla de causa de X hacia Y, y todo lo deja en manos de una prueba de F , así, aunque el listado de cómputo arroje los estadísticos usuales, uno debe concentrarse en el test de Granger.

Hay autores que inicialmente sacan primeras o segundas diferencias de las variables para hacerlas estacionarias (Chatfield 1980). El hacer las variables estacionarias del segundo orden modifica el concepto que queremos analizar. Aunque la recomendación proveniente de la teoría de series de tiempo tiene sus bases, no se va a realizar esta acción ya que, desde el punto de vista económico, la variable ha sufrido un cambio en interpretación: hablar de Z que de la variación de Z, no es lo mismo:

1. Decir que X causa a Y, es una cosa.

2. Decir que una variación en X causa una variación en Y, es otra.

Por otra parte, la prueba F es válida dentro del contexto general de la regresión. Debemos recordar que esta prueba de Granger es polémica (Griliches & Intriligator 1983).

Hagamos el ejercicio de realizar la prueba de Granger; nos preguntaremos si la balanza es causada por el tipo de cambio real (denotado por Er).

Se propone como modelo irrestricto de elasticidades a la balanza dependiendo de su pasado, denotándolas por: BL1 = BL(-1), BL2=BL(-2), y del pasado de los tipos de cambio ER, denotados por: ER1 =ER(-1), ER2=ER (-2); se hacen las operaciones correspondientes:²

	BL1	BL2	ER	ER1	ER2
coeficiente	1.60	-0.88	0.29	-0.27	-0.14
estadístico t	16.23	7.07	9.62	-3.9	-4.03

$$R^2 = 0.95 \quad R_a^2 = 0.94 \quad dw = 2.10 \quad \sum e_i^2 = 2176.327$$

y para el modelo restringido:

	BL1	BL2
coeficiente	1.34	-0.67
estadístico t	9.02	-3.91

$$R^2 = 0.78 \quad R_a^2 = 0.77 \quad dw = 1.81 \quad \sum e_i^2 = 9767.85$$

Así, la prueba toma la forma:

$$F^* = \frac{(9767.85 - 2176.32) / 3}{2176.32 / (34 - 5)} = 33.72$$

como el valor de tablas es: $F(3,29) = 2.92$, ER sí causa a BL, ya que la evidencia empírica rechaza la idea de que todos los parámetros de las elasticidades sean nulos, como debe haber al menos uno no cero, el tipo de cambio sí causa a la balanza.

Pasemos a analizar la condición de Marshall-Lerner por medio de un análisis estructural, proponiendo un sencillo modelo tipo Cobb-Douglas para evaluar el comportamiento de la balanza.

² Los resultados de R^2 , R_a^2 , dw corresponden al coeficiente de determinación, su correspondiente ajustado y al estadístico de Durbin Watson, respectivamente.

Las variables a utilizar son: exportaciones (Exp), importaciones (Imp), tipo de cambio real expresado como peso/dólar y denotado por *er*, (recuerde que si la cifra se eleva habla de una devaluación y si desciende se revalúa nuestra moneda en relación al dólar), PIB a precios constantes (Y) y el PNB de EU (YEU) a precios constantes, todos con base 1980.

Los datos provienen de los datos del acervo histórico del Banco de México, *Indicadores económicos: valor de la importación y exportación*, cuadro IV-H-2, PIB y su deflactor II-H-1 y tipo de cambio del cuadro H-27.

Siendo la especificación para cada función:

$$\begin{aligned} \text{Exp} &= er^{\alpha_1} \cdot y^{\alpha_2} \cdot \text{YEU}^{\alpha_3} \\ \text{Imp} &= er^{\beta_1} \cdot y^{\beta_2} \end{aligned}$$

Se escoge esta formulación debido a la sencilla propiedad de que las elasticidades son directamente los exponentes del modelo. De este modo la condición de Marshall-Lerner es:

$$| \alpha_1 | + | \beta_1 | > 1$$

el símbolo *a* denota valor absoluto de *a*. La condición permite que alguna componente tenga elasticidad baja pero la otra debe compensar la falla para que se pueda efectuar la mejora del saldo comercial, para asegurar una balanza comercial en equilibrio. Para estimar la función de exportaciones se aplica logaritmo y vamos a especificar un parámetro adicional de media móvil, MA(1), en la estructura de los errores, o sea el modelo:

$$\text{Log}(\text{Exp}) = \alpha_1 \cdot \text{Log}(er) + \alpha_2 \cdot \text{Log}(Y) + \alpha_3 \cdot \text{Log}(\text{YEU}) + e_t$$

es adicionado con el término MA(1) lo que significa:

$$e_t = \Gamma \cdot a_{t-1} + a_t \quad \text{y} \quad a_t \text{ es ruido blanco.}$$

Para estimar la función de importaciones, se propone un análogo al caso anterior:

$$\text{Log (Imp)} = \beta_1 \cdot \text{Log (er)} + \beta_2 \cdot \text{Log (Y)} + e_t$$

también con un parámetro adicional MA(1) en la estructura de los errores. Se escoge esta formulación debido a que es la que hallamos con más parsimonia, esto es, otros modelos factibles llevan un mayor número de parámetros a estimar.

Al realizar las estimaciones correspondientes para los datos anuales 1950-1985, se obtiene para las exportaciones:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = 0.63 & t\alpha_1 = 3.71 \\ \alpha_2 = 2.9 & t\alpha_2 = 12.76 \\ \alpha_3 = -3.72 & t\alpha_3 = -9.65 \\ \Gamma = 0.68 & t\Gamma = 3.78 \end{array}$$

Vea que el signo que corresponde al subíndice 3 está "equivocado", o uno llega a la idea de que si se da un aumento en el PNB de los EU, nuestras exportaciones se desploman, ¿para el mercado de los EU nuestras exportaciones se portan como un bien de Giffen?

$\Gamma = 0.68$, como es menor a uno, cumple la condición de estabilidad.

$$R^2 = 0.89 \quad R_a^2 = 0.88 \quad dw = 1.68 \quad F = 94.53$$

La suma de los cuadrados de los residuos nos da $\sum e_t^2 = 2.21$ y el test de Portmanteau sobre los residuos da $Q(10) = 10.127$, con esto los residuos aprueban la prueba de ser ruido blanco, los residuos también cruzan la prueba de Bartlett al 5% nivel de significación, o sea, se acepta una variación puramente aleatoria en los residuos.

Los anteriores resultados nos permiten decir que se tiene un modelo aceptable. Aunque, insistimos, un signo está equivocado y se prefiere dejar así la estimación a torturar

los datos hasta que confiesen, es mejor que ellos hablen por sí mismos.

Los resultados de la estimación para las importaciones son:

$$\begin{array}{ll} \beta_1 = -0.71 & t\beta_1 = -7.47 \\ \beta_2 = 0.76 & t\beta_2 = 15.79 \\ \Gamma = 0.599 & t\Gamma = 3.38 \end{array}$$

$\Gamma = 0.599$, como es menor a uno, cumple la condición de estabilidad,

$$R^2 = 0.87 \quad R_a^2 = 0.86 \quad dw = 1.7184 \quad F = 115.86$$

La suma de los cuadrados de los residuos nos da $\sum e_i^2 = 1.65$, la prueba de Portmanteau nos da $Q(10) = 16.267$, con esto los residuos aprueban el test, sin embargo, cabe mencionar que no todos los residuos cruzan la prueba de Bartlett, la autocorrelación de orden dos se sale de la banda. Con este modelo la condición de Marshall-Lerner es:

$$1.34 = |0.63| + |-0.71| = |\alpha_1| + |\beta_2| > 1$$

Esto nos dice que la evidencia empírica sí apoya el enfoque de elasticidades. Un trabajo más elaborado sería proponer una prueba de hipótesis sobre desigualdades.

Vale la pena comentar que si se realizan las estimaciones anteriores ahora en lugar de poner en las perturbaciones una media móvil de orden uno, se aceptan los supuestos ideales de la econometría uniecuacional, la suma de elasticidades es:

$$1.35 = |0.64| + |-0.71| > 1$$

La condición se cumple nuevamente, lo cual sugiere cierta fortaleza, estos resultados muestran que el instrumento para mantener el equilibrio de la balanza es a través de un manejo inteligente del tipo de cambio.

Cambio Estructural. Una pregunta natural es: ¿el patrón de comportamiento de las exportaciones y las importaciones se alteró debido a la crisis de 1982? Para contestar, aplicaremos una conocida prueba de cambio estructural, llamada la prueba de Chow, (Maddala, 1977) la cual es como sigue:

Se tiene una muestra de $n = n_1 + n_2$ observaciones en total y se desea saber si los últimos n_2 datos han sido generados por el mismo modelo que generó los primeros n_1 valores, para esto se estiman dos regresiones, una con el total de datos y la otra con sólo las primeras n_1 observaciones, si al comparar la suma de los cuadrados de los residuos—ajustados por los grados de libertad— no hay una diferencia significativa, diremos que no se presentó un cambio estructural.

El estadístico de prueba es:

$$F(n_2, n_1 - k) = \frac{(\sum et(n)^2 - \sum et(n_1)^2) / n_2}{\sum et(n_1)^2 / (n_1 - k)}$$

K es el número total de parámetros en el modelo.

Tomemos el punto de corte en 1982, entendido éste como 1950-1981 ($n_1 = 32$) y la otra parte 1982-1985 ($n_2 = 4$), al hacer las sustituciones se llega, para las exportaciones:

$$F_{exp}(4, 32 - 4) = \frac{(2.21 - 1.13) / 4}{1.13 / (32 - 4)} = 6.75$$

y, para las importaciones:

$$F_{imp}(4, 32 - 3) = \frac{(1.65 - 1.28) / 4}{1.28 / (32 - 3)} = 2.102$$

Siendo el valor de tablas al 5%:

$$F(4, 32 - 4) = 2.71$$

$$F(4, 32 - 3) = 2.69$$

En el primer caso, el patrón exportador se modifica bajo la presencia de la crisis de 1982, mientras que la estructura de las importaciones no se ve alterada y tenemos el mismo patrón de importaciones.

EL SISTEMA INSUMO PRODUCTO DE LEONTIEF

En la economía es ampliamente reconocido el sistema de Leontief, por medio del cual los gobiernos analizan las repercusiones que tiene el gasto público en el nivel de la producción. En esta sección se comentará el trabajo del economista W. Leontief y así, mostraremos un instrumento de apoyo para la elaboración de las iniciativas económicas usado por todos los países del mundo.

Para hacer las cosas de manera simple consideremos solamente seis sectores productivos en la economía. El caso general es fácil de visualizar. Tomemos pues, como base, seis industrias denotadas por los símbolos: N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , N_5 y N_6 , entre ellas envían mercancías así:

x_{ij} es la cantidad del bien i que va al sector j , mientras que X_i es la cantidad total producida del bien i -ésimo y el símbolo q_i es la cantidad disponible para la demanda final.

Las relaciones de transacción están dadas por:

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + q_1$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + q_2$$

$$X_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + q_3$$

$$X_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + q_4$$

$$X_5 = x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + q_5$$

$$X_6 = x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + q_6$$

$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ es el vector de la producción total de la economía, producción llevada a cabo por los sectores:

N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 y N_6 mientras que: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 , y q_6 es su demanda final correspondiente (Bulmer, Thomas 1982).

Un poco de álgebra sencilla nos da:

$$X_1 = (x_{11}/X_1) \cdot X_1 + (x_{12}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{16}/X_6) \cdot X_6 + q_1$$

$$X_2 = (x_{21}/X_1) \cdot X_1 + (x_{22}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{26}/X_6) \cdot X_6 + q_2$$

$$X_3 = (x_{31}/X_1) \cdot X_1 + (x_{32}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{36}/X_6) \cdot X_6 + q_3$$

$$X_4 = (x_{41}/X_1) \cdot X_1 + (x_{42}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{46}/X_6) \cdot X_6 + q_4$$

$$X_5 = (x_{51}/X_1) \cdot X_1 + (x_{52}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{56}/X_6) \cdot X_6 + q_5$$

$$X_6 = (x_{61}/X_1) \cdot X_1 + (x_{62}/X_2) \cdot X_2 + \dots + (x_{66}/X_6) \cdot X_6 + q_6$$

Se definen los coeficientes fijos como de costumbre:

$$A_{ij} = x_{ij} / X_j$$

de acuerdo con el teorema de la no-sustitución de Paul Samuelson, dentro de un periodo de tiempo corto estos coeficientes son constantes, lo que nos permite escribir la matriz de insumo-producto como:

$$X = A \cdot X + Q$$

$$X' = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$$

$$Q' = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

Z' es la transpuesta de Z .

Aquí, a partir de un nivel de producción X se determina el nivel de demanda Q , lo importante de todo este modelo, es que podemos invertir este proceso y a partir de un nivel planeado en Q , el cual es guiado por el gasto de gobierno, podemos ahora anticipar la producción, o sea X , y de este modo el gobierno orienta la economía.

La matriz de coeficientes directos e indirectos en el esquema de Leontief es:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot Q$$

Como es bien sabido se tiene la serie infinita:

$$X = Q + A \cdot Q + A^2 \cdot Q + \dots + A^n \cdot Q + \dots$$

En el primer *round*, Q es el impacto inicial, lo cual a su vez provoca actividad económica en compras a los proveedores de bienes y servicios en la proporción $A \cdot Q$, los cuales a su vez hacen compras a sus proveedores originando $A^2 \cdot Q$ y así sucesivamente se produce una cascada de compras entre los sectores productivos. Debido a que el efecto remoto es negligible, esto es, los términos $A^n \cdot Q$ se aproximan a cero para n grande, se requiere que su norma sea tal que $||A|| < 1$ para poder asegurar la convergencia de la serie, no entraremos a los detalles de convergencia.

El gasto de gobierno es una componente importante de Q y éste a su vez motiva la acción de los particulares, ya que el gobierno demanda edificios, autos, etc. Con su gasto (a nivel federal, estatal y municipal) el gobierno puede afectar los niveles de empleo ya que puede obligar un aumento de la producción.

Es bien sabido que se debe mencionar en estos estudios un teorema de Samuelson puesto que da el estrato teórico fundamental para este análisis. El lector interesado puede encontrar el teorema de la no-sustitución en Sohn Ira o en el libro de Harl Varian. Este teorema señala que "hay $n+1$ bienes, los primeros n se llaman productos y el último se llama trabajo".

Hipótesis I: hay una colección de actividades básicas, cada una representada por un vector con $n+1$ entradas, tales que, cada posible estado productivo es representado por una combinación lineal de un número finito de actividades básicas con coeficientes no-negativos. La colección de actividades básicas que puede ser formada por tales combinaciones puede no ser finita (rendimientos constantes a escala*).

* Los paréntesis son agregados a la traducción de los términos que hago.

Hipótesis II: ninguna actividad básica tiene más de un producto (no hay producción múltiple*).

Hipótesis III: en toda actividad básica el trabajo es un insumo positivo (no hay *lunch* libre*).

Hipótesis IV: hay una cantidad dada desde el exterior de trabajo, la cual no se produce en ninguna de las n actividades.

Bajo estos supuestos se comprueba que las funciones de costo de cada industria son de la forma:

$$C_i(w, x_i) = C_i(w) \cdot x_i$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

y las $C_i(w)$ son funciones de costo unitario.

Bajo las hipótesis anteriores, el teorema garantiza que los precios relativos (que representa el vector w , con numerario $w_0 = 1$) no se alteran, y no dependen del nivel de $X = (x_i)$ y la matriz fija A se obtiene a partir de la estructura de costos constantes en la economía, ya que al modificar Q , A no se altera y sólo se ajusta X , que es la producción requerida para llenar el nivel de demanda propuesto.

El mismo Samuelson señala: "Lo que pasa es que todas las sustituciones deseables entre los insumos ya se han hecho y por lo tanto no hay variación alguna en la composición de la producción final o en la cantidad de trabajo utilizada que resulte en una modificación en los precios" (Samuelson, en Sohn 1986, p. 192).

Las cadenas productivas de la economía son estudiadas por este modelo, se enlazan sectores a modo que unos sectores son proveedores de otros. Se acostumbra hablar de efecto hacia atrás sólo para los proveedores del bien dado, y como efecto hacia adelante como las ventas del bien dado en donde ahora entra como un insumo, se pueden analizar los impactos hacia adelante y hacia atrás en el intercambio que se da entre los sectores, denotando por:

$R = (r_{ij}) = (I - A)^{-1}$
 a la inversa de Leontief, reescribimos:

$$X = (I - A)^{-1} \cdot Q = R \cdot Q$$

La interpretación es que r_{ij} mide el estímulo en el flujo bruto de la i -ésima entidad cuando la j -ésima entidad aumenta su gasto en una unidad.

El efecto hacia atrás (entidades proveedoras a lo largo de la columna j) es:

$$Z_j = \frac{(1/n) \sum_i r_{ij}}{(1/n^2) \sum_j \cdot \sum_i r_{ij}}, \quad \text{esto es,}$$

$Z_j = \frac{\text{Estímulo promedio enviado hacia otras entidades debido a una unidad de aumento en el gasto de la entidad } j.}{\text{Estímulo promedio para todos los miembros de la economía cuando todas las entidades incrementan su gasto por una unidad.}}$

El efecto hacia adelante (entidades de las que es proveedor, a lo largo del renglón i) es:

$$Z_i = \frac{(1/n) \sum_j r_{ij}}{(1/n^2) \sum_j \cdot \sum_i r_{ij}}, \quad \text{esto es,}$$

$Z_i = \frac{\text{Estímulo promedio hacia otras entidades debido a una unidad de aumento en el gasto de la entidad } i.}{\text{Estímulo promedio para todos los miembros de la economía cuando todas las entidades incrementan su gasto por una unidad.}}$

En suma, la planificación económica hace uso de este esquema de Leontief para desarrollar un plan de gasto de gobierno. Siendo Q^{\wedge} el valor adelantado de la demanda, se obtiene X^{\wedge} , que es la cifra anticipada de la actividad productiva promovida por la iniciativa económica:

$$X^{\wedge} = (I - A)^{-1} \cdot Q^{\wedge}$$

La estabilidad puede ser estudiada, tal como se halla en la literatura, por la condición de Hawkins-Simon cuando se aplica al suficiente para que el sistema tenga soluciones positivas (o sea que $x_i > 0$), es que:

$$\sum b_{ij} \cdot x_j = q_i$$

(siendo $B = I - A$ una matriz cuadrada y de rango máximo, esto es, que su determinante, $\det(B)$, sea diferente de cero, y que también las $q_i > 0$ para toda i), es que todos los menores principales de B sean positivos.

La interpretación económica de Hawkins-Simon es que "las condiciones para la producción son internamente consistentes permitiendo la elaboración de una canasta de consumo, entonces, cualquier canasta se puede obtener a partir de múltiplos de la canasta inicial".

Que los menores principales sean positivos, significa que los correspondientes grupos de industrias produzcan más de lo que requieren para sí. De no ser el caso se presentaría un problema de agotamiento (*ibid.* cap. 12).

Uno se podría preguntar cómo se puede hacer un seguimiento de manera práctica de esta matriz de requerimientos técnicos, ya que con el paso del tiempo es natural que algunos coeficientes se modifiquen y, si la economía está bajo un programa de cambio estructural, es de esperar que se modifiquen los coeficientes técnicos de la matriz de insumo producto profundamente. Para esto se aplica el método RAS a la matriz añeja, para obtener una nueva matriz

biproporcional a la original, algunos autores le llaman "la matriz raseada" siendo éste el camino usual. En México el INEGI colecta información nacional periódicamente y aplica el método RAS (llamado así por su autor Richard A. Stone), en cuyo caso lo importante es que las delegaciones del INEGI envíen los datos necesarios para que se lleve a cabo este método de biproporcionalidad.

Uno puede dinamizar el esquema por medio del modelo dinámico de Leontief y con él ver problemas donde el tiempo tiene un lugar relevante, no entraremos en este tema porque las complicaciones matemáticas van más allá de los límites del trabajo, si el lector gusta en Bulmer Thomas puede estudiar este punto.

Bibliografía

- ABRAHAM, Bovas y Johannes Ledolter. *Statistical Methods for Forecasting*, Wiley, 1983.
- ALEXANDER, S. S. "Effects of a Devaluation on a Trade Balance", en *Staff Papers*, IMF, núm. 1, 1952.
- BULMER, Thomas. *Input-Output Analysis in Developing Countries*, caps. 4 y 12, Wiley, 1982.
- CHATFIELD, Christopher. *The Analysis of Time Series: an Introduction*, Chapman and Hall, 1980.
- DORNBUSCH, R. *Open Economy Macro-Economics*, Basic Books Inc., 1980.
- GRANGER, C. W. J. y Paul Newbold. *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, 1977.
- GRILICHES, Zvi y Michael Intriligator. *Handbook of Econometrics*, vol. I, II, III, North Holland, 1983.
- Harvey, A.C. *The Econometric Analysis of Times Series*, Philip Allan, 1981.
- HOUTHAKKER, H. S. y S. P. Magee. "Income Price Elasticities in World Trade", en *Review of Economics and Statistics*, vol. 51, mayo de 1969, pp. 111-125.

- INGRAM, J. C. *International Economy*, Wiley, 1986.
- INTRILIGATOR, Michael. *Econometric Models, Techniques & Applications*, Prentice Hall, 1978.
- IZE, Alain y Gabriel Vera. *La inflación en México*, El Colegio de México, 1981.
- JOHNSTON, J. *Econometric Methods*, McGraw Hill / Kogakusha, 1972.
- JUDGE, George, R. Hill, Carter, William Griffiths, Helmut Lütkep-hol y Lee Tsoung-Chao. *The Theory and Practice of Econometrics*, Wiley, 1982.
- LEVACIC & REBMANN. *Macroeconomics*, Gran Bretaña, Mc Millan Press, 1982, p. 109-110.
- MADDALA, G.S. *Econometría*, Mc GrawHill, 1977.
- OTT, David J., Attiat F. Ott. y Jang H. Yoo. *Macroeconomic Theory*, Mc Graw Hill / Kogakusha, 1975.
- PÉREZ, Germán *et al.* *Evolución de Estado mexicano*, vol. I, II, III, Mé-xico, El Caballito, 1986.
- PINDYCK, Robert y Daniel Rubinfeld. *Econometric Models and Eco-nomic Forecasts*, McGraw Hill, 1981.
- SARGENT, Thomas. *Macroeconomic Theory*, Academic Press, 1979.
- SOHN, Ira. *Readings in Input-Output Analysis*, EUA, Oxford Univer-sity Press, 1986.
- VARIAN, Harl. *Microeconomic Analysis*, EUA, Norton, 1978, p. 173.

ANEXO

DATOS DEL PIB A PESOS CONSTANTES DE 1980

<i>Año</i>	<i>Producción</i>	<i>Año</i>	<i>Producción</i>
1895	163 737.7	1908	240 575.8
1896	168 803.8	1909	247 646.3
1897	180 121.6	1910	249 849.3
1898	190 524.6	1921	268 985.3
1899	181 306.8	1922	275 253.0
1900	182 730.3	1923	284 709.2
1901	198 430.3	1924	280 109.9
1902	184 281.3	1925	297 474.5
1903	204 920.5	1926	315 322.3
1904	208 523.2	1927	301 320.6
1905	230 188.8	1928	303 320.6
1906	227 588.0	1929	291 589.1
1907	240 941.6	1930	273 312.3

Fuente: Tomado del *Acervo Histórico, Indicadores económicos*. Banco de México, cuadro II-H-1.

Se realiza la regresión simple: $\text{producción} = b + m \cdot \text{año}$, de la cual se obtiene:

$$\text{producción} = -1\ 386\ 330.10 + 749.09 \cdot \text{año}$$

$$(t = -13.24) \quad (t = 13.69)$$

$$R^2 = R_a^2 = 0.96 \text{ y } F = 386$$

se incluyó corrección por autocorrelación, dando $\delta = 0.495$ con una t de $t_\delta = 3.18$.